LOGIK UND MENGENLEHRE

ÜBUNGSBLATT 8

1. Man zeige, dass der Verband $(\mathbb{N}, |)$ distributiv ist.

2. Sei $(L, \leq)$ ein Verband. Man zeige, dass $(L, \leq)$ genau dann distributiv ist wenn

$$a \wedge c = b \wedge c, a \vee c = b \vee c \Rightarrow a = b$$

für alle $a, b, c \in L$ gilt.

3. Sei $(L, \leq)$ ein Verband. Man zeige, dass $(L, \leq)$ genau dann modular ist wenn

$$a \leq b, a \wedge c = b \wedge c, a \vee c = b \vee c \Rightarrow a = b$$

für alle $a, b, c \in L$ gilt.

4. Man zeige, dass der Verband $(\mathcal{U}(V), \leq_K)$, aller Unterräumen eines K-Vektorräumes V modular ist, aber nicht immer distributiv.

5. (Die Fixpunktlemma von Tarski.) Ist $f : A \to A$ eine Abbildung, so nennt man *Fixpunkt* der Abbildung f ein Element $a \in A$ das die Eigenschaft $f(a) = a$ genügt. Man zeige, dass wenn $(L, \leq)$ ein vollständiger Verband ist, und $f : L \to L$ eine wachsende Abbildung ist, dann f besitzt mindestens einen Fixpunkt.

6. Ist $(B, \leq, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ eine BOOLEsche Algebra, so ist $(B, +, \cdot)$ ein Ring, wobei $x + y = (x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{x})$ und $xy = x \wedge y$, für alle $x, y \in B$. In dem Ring B gilt es $x^2 = x$, für alle $x \in B$ (So ein Ring wird BOOLE gennant).

7. Ist B ein Ring BOOLE, so ist B kommutativ und $x + x = 0$ für alle $x \in B$.

8. Ist B ein Ring BOOLE, so ist $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ eine BOOLEsche Algebra, wobei $x \vee y = x + y - xy$, $x \wedge y = xy$, $\bar{x} = 1 - x$, für alle $x, y \in B$, und $0, 1$ die Neutralelemente für $+$ bezuglich $\cdot$ sind.

9. Ist $(B, \leq, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ eine BOOLEsche Algebra, und $x, y \in B$, so gelten:
   a) $\bar{\bar{x}} = x$;
   b) $x \wedge y = 0$ g.d.w. $y \leq \bar{x}$;
   c) $x \leq y$ g.d.w. $\bar{y} \leq \bar{x}$;
   d) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$;
   e) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$.

10. Für eine HEYTING Algebra $(B, \leq, \vee, \wedge, \to, 0)$, setzen wir $1 = 0 \to 0$ und $\bar{x} = x \to 0$. Ist die HEYTING Algebra B distributiv, und sind $x, y, z \in B$ so gelten:

a) $1 = x \to x$;
b) $x \leq y$ g.d.w. $x \to y = 1$;
c) $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq (x \to z)$;
d) $x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$;
e) $\bar{1} = 0$;
f) $\bar{0} = 1$;
g) $x \leq \bar{\bar{x}}$
h) $a \to b \leq \bar{b} \to \bar{a}$;
g) $x \wedge \bar{x} = 0$.

(Bemerkung: Die Distributivität kan man aus der anderen Axiomen der HEYTING Algebra beweisen werden.)

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`